

Критерий эффективности применения портфельной теории Марковица в краткосрочной торговле на примере Украинской фондовой биржи

Евдокименко Юрий Иванович

Харьковский торгово-экономический институт Киевского национального торгово-экономического университета, доцент кафедры высшей математики и информатики, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Украина

Ефименко Галина Петровна

Харьковский торгово-экономический институт Киевского национального торгово-экономического университета, старший преподаватель кафедры высшей математики и информатики, Украина

Змиевская Ирина Витальевна

Харьковский торгово-экономический институт Киевского национального торгово-экономического университета, старший преподаватель кафедры высшей математики и информатики, Украина

Обоянская Любовь Афанасьевна

Харьковский торгово-экономический институт Киевского национального торгово-экономического университета, старший преподаватель кафедры высшей математики и информатики, Украина

Аннотация. В работе проводится сравнительный анализ доходностей и риска двух портфелей акций: портфеля с равными долями активов и портфеля с долями активов, определенными на основе портфельной теории Марковица. Цель выполненного исследования – выявления эффективности применения портфельной теории Марковица для прогнозирования в условиях торговли на Украинской фондовой бирже.

По результатам исследования выработаны критерии эффективности и произведена их оценка. Доказано, что портфель, созданный на основе решения задачи Марковица, обладает меньшим риском при равной доходности, а в некоторых случаях и большей доходностью, что позволяет считать его более эффективным в процессе диверсификации риска портфеля активов.

Ключевые слова: критерий эффективности, доходность, риск, портфель активов, портфельная теория Марковица.

Введение

Методика оптимизации состава и распределения акций в портфеле активов, получившая название «портфельная теория Марковица» [1, 2] создавалась в 50-е годы прошлого столетия. В эти годы вплоть до конца прошлого века курсы акций основных компаний, участвовавших в торгах на американских фондовых биржах, имели устойчивый восходящий тренд с небольшими

по амплитуде циклическими колебаниями, что наглядно отображается поведением индексов Доу-Джонса в те годы [3]. Поскольку в таких условиях всегда можно было сформировать безубыточный портфель активов, основной задачей инвестиционных компаний и фондов являлось создание такого портфеля активов, который обеспечивал минимум риска от ожидаемой доходности портфеля активов, т.е. минимум циклических колебаний доходности созданного портфеля активов относительно восходящего тренда.

Судя по популярности, с такой задачей разработанная Марковицем теория в долгосрочной перспективе великолепно справлялась вплоть до конца прошлого столетия. В последующие годы (в этом веке) на смену восходящему тренду пришли возрастающие по амплитуде циклические колебания курса акций. Изменившееся поведение курса акций повторно выдвигает на повестку дня вопрос эффективности портфельной теории Марковица. Кроме того, появившиеся в эти же годы Интернет и вместе с ним возможность электронных торгов интенсифицировали темп торговли на биржах. Теперь под краткосрочным понимают темп с периодом один час, один день. Актуальным становится вопрос эффективности применения данной теории для торговли с таким темпом и параллельно критериев эффективности.

Целью данной статьи является анализ эффективности портфельной теории Марковица для ее применения в краткосрочной торговле на Украинской фондовой бирже и обоснование выбора критериев эффективности.

Результаты исследования

Известно [2], что портфельная теория Марковица является многокритериальной оптимизационной задачей, в которой ищутся такие значения распределений долей активов в портфеле, которые одновременно обеспечивают максимально возможное значение ожидаемой доходности портфеля активов при минимально возможном значении риска портфеля активов (среднего квадратичного отклонения). Математическая постановка задачи имеет вид (1)-(4):

- ожидаемая доходность портфеля активов (среднее выборочное):

$$m_p = W^T \cdot M \rightarrow \max; \quad (1)$$

-риск портфеля активов (дисперсия):

$$S_p^2 = W^T \cdot V \cdot W \rightarrow \min; \quad (2)$$

- при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1; \text{ (сумма всех долей активов в портфеле равна 1);} \quad (3)$$

$$w_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n \text{ (доли не могут быть отрицательными);} \quad (4)$$

где $W_{[n \times 1]}$ – вектор искомых долей активов в портфеле;
 $M_{[n \times 1]}$ – вектор ожидаемых доходностей активов, отбираемых в портфель;
 $V_{[n \times n]}$ – матрица ковариаций доходностей активов;
 n – количество активов [4].

Задача Марковица, являясь многоцелевой оптимизационной задачей, может быть решена либо графически (с преобразованием одной из целевых функций в функциональное ограничение), либо путем объединения обеих целевых функций (1) – (2), в одну, называемую функцией полезности (5):

$$f(W) = m_p(W) - \alpha \cdot S_p(W) \rightarrow \max \quad (5)$$

где α – коэффициент, определяющий вес риска [4].

Предполагается, что найденные в результате решения задачи (3) – (5) значения долей активов (координаты вектора W) будут оптимальными и в следующих торгах. Поэтому, данная задача одновременно является задачей прогнозирования. Соответственно, ставится вопрос эффективности такого прогноза в практической торговой деятельности на фондовой бирже.

Поскольку данная теория является одним из видов финансовой диверсификации, естественным будет сравнение эффективности портфелей активов созданных на основе простой диверсификации, т.е. портфель с равными долями активов (далее по тексту «обычный портфель») и диверсификации с применением теории Марковица (далее по тексту «портфель Марковица»).

Следуя правилу простой диверсификации [5] для проведения эксперимента в воображаемый портфель были отобраны шесть наиболее ликвидных акций предприятий Украины, принадлежащих различным отраслям экономики и имеющих следующие коды эмитента: ALMK, AVDK, BAVL, DOEN, MSICH, UNAF [6]. Такой подбор, как известно [4, 5], позволяет минимизировать корреляцию колебаний курсов акций в составе портфеля и более того – достичь наиболее желаемого результата – отрицательных значений корреляции.

Для проведения сравнительного анализа были реализованы две выборки значений курсов акций состоянием на конец каждого торгового дня объемом по 31 значению: первая – в период с 16.06 по 29.07.2014 и вторая – с 15.08 по 29.09.2014. Дадим краткие пояснения относительно подхода в реализации выборок. Случайным образом была отобрана одна большая выборка курсов акций протяженностью в полгода, а внутри нее были выбраны указанные два временных интервала наблюдения, к которым предъявлялись следующие условия:

1. В пределах одного интервала поведение курсов подобно ситуации середине прошлого столетия, на основе которой разрабатывалась теория Марковица, т.е. должен наблюдаться преимущественный рост курса акций выбранных активов с малой волатильностью всех выбранных активов (MSICH и UNAF) (рис. 1).

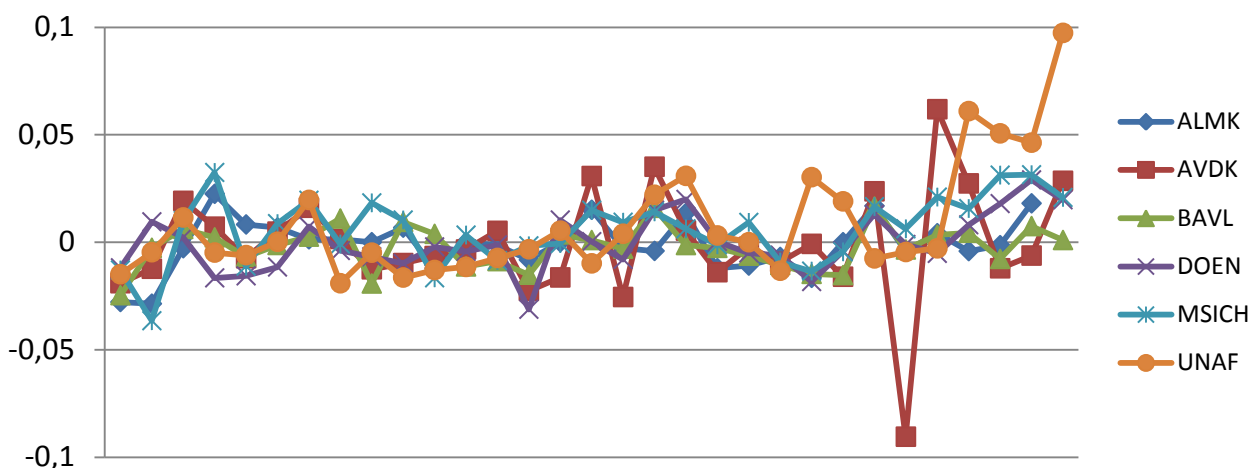


Рисунок 1 – Значения доходностей выбранных активов в течение интервала наблюдения за первой выборкой

2. В пределах другого интервала поведение курсов акций, аналогичное нынешнему состоянию на бирже, т.е. должны наблюдаться большая волатильность всех выбранных активов и отсутствие периодов устойчивого роста курса (рис. 2).

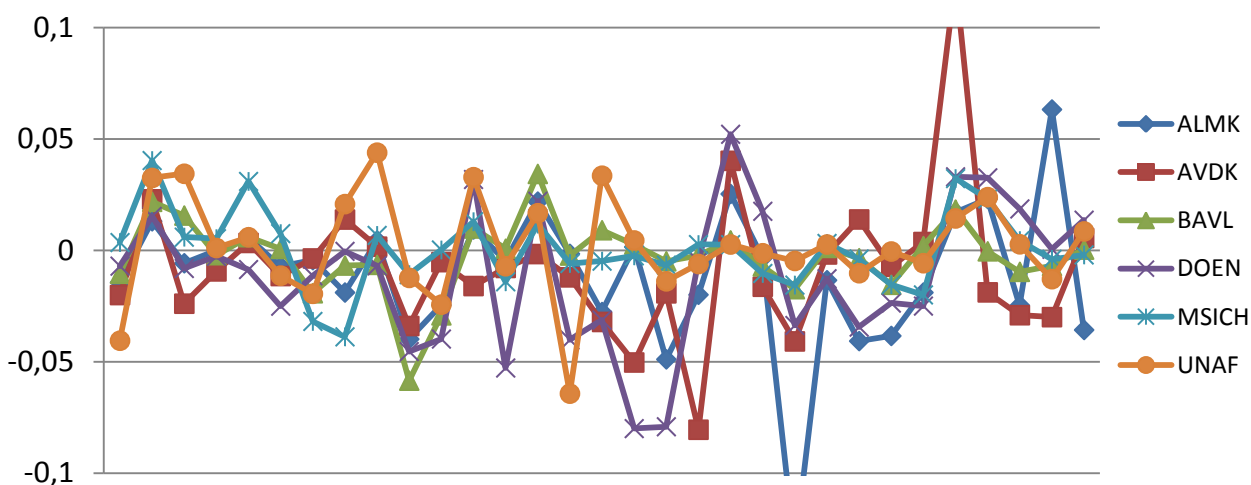


Рисунок 2 – Значения доходностей выбранных активов в течение интервала наблюдения за второй выборкой

3. Последнее условие – небольшой разрыв во времени между двумя выборками для того, что бы внешние условия, воздействующие на трейдеров, в обоих случаях были примерно одинаковыми.

Для обеих выборок были рассчитаны по тридцать значений доходностей по формуле (6):

$$\text{Доходность}(k) = \frac{\text{Курс}(k) - \text{Курс}(k-1)}{\text{Курс}(k-1)}, \quad (6)$$

где k ($k = 1, 2, \dots, 30$) – порядковый номер дня в каждой выборке (счет дней начинается с нуля).

Затем, начиная с первых десяти значений доходностей ($k = 1, 2, \dots, 10$) каждого актива для обеих выборок, находились значения вектора ожидаемой доходности M , матрицы ковариаций V и решалась задача Марковица (3) – (5). В результате решения находились значения долей активов W , обеспечивающих максимум функции полезности (5) и ожидаемое значение доходности портфеля m_p для найденных значений долей активов (1).

Найденные значения распределения долей активов в портфеле представляют собой оптимальный с позиций портфельной теории Марковица прогноз на следующий день ($k = 11$). Но, поскольку анализ проводился постфактум, значения курса выбранных активов и доходностей выбранных активов были известны и использовались для вычисления реального значения доходности портфелей на этот день ($k = 11$).

После того как были найдены реальные доходности обоих портфелей для одиннадцатого дня в обеих выборках, осуществлялась сдвигка внутри выборок на один день, т.е. на втором шаге для определения оптимального по Марковицу прогноза на двенадцатый день в обеих выборках, выбирались значения доходностей активов с $k = 2, 3, \dots, 11$, для которых находились значения вектора ожидаемой доходности M матрицы ковариаций V .

Затем вновь решалась задача Марковица, в результате чего получался прогноз распределения активов на двенадцатый день. По полученным значениям распределения активов рассчитывалась реальная доходность портфеля Марковица для $k = 12$.

Описанный алгоритм определения реальных доходностей обоих портфелей выполнялся двадцать раз. В результате двадцатикратного решения задачи было получено по двадцать реальных значений доходностей портфеля Марковица, а также реальных доходностей портфеля активов с равными долями для обеих выборок.

Средние значения ($m_{M,p}, m_{o,p}$), дисперсии ($S_{M,p}^2, S_{o,p}^2$) и средние квадратичные отклонения ($S_{M,p}, S_{o,p}$) реальных значений доходностей для обеих выборок приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Описательная статистика эксперимента

	Реальные доходности						Разности		
	портфель Марковица			обычный портфель			реальных доходностей		
	$m_{M,p}$	$S_{M,p}^2$	$S_{M,p}$	$m_{o,p}$	$S_{o,p}^2$	$S_{o,p}$	\bar{D}	S_D^2	S_D
Выборка 1	0,0056	0,00022	0,0151	0,0021	0,00013	0,0114	0,0034	0,000072	0,0085
Выборка 2	-0,0059	0,00016	0,0125	-0,0059	0,00034	0,0185	0,00002	-0,00017	0,0129
Объединенная	-0,00012	0,00022	0,0149	-0,0019	0,00025	0,0156	0,0018	-0,00012	0,0110

Для оценки эффективности прогноза приняты следующие критерии. Под большей эффективностью понимается наличие одной из двух условий:

1. При примерно одинаковом риске среднее значение реальной доходности портфеля, созданного на основе решения задачи Марковица, больше среднего значения реальной доходности портфеля с равными долями активов.

2. При примерно равных средних значениях реальных доходностей портфеля Марковица и обычного портфеля риск портфеля Марковица меньше.

Сравнивая между собой пары значений $t_{M,p}$ с $t_{o,p}$ и $S_{M,p}$ с $S_{o,p}$, видим, что для первой выборки выполняется первое из указанных условий эффективности, т.е. $S_{M,p} \approx S_{o,p}$; $t_{M,p} > t_{o,p}$. Для второй выборки выполняется второе условие эффективности, $S_{M,p} < S_{o,p}$; $t_{M,p} \approx t_{o,p}$.

Поскольку результаты получены на основе обработки выборок и могут быть просто ситуативными, оценим вероятность, с которой могут быть распространены результаты выборок на всю генеральную совокупность, обладающую общими для обеих выборок свойствами.

Применим односторонний t-критерий Стьюдента для проверки гипотезы о положительной разности между математическими ожиданиями [4] реальных доходностей сравниваемых портфелей по наблюдаемому уровню значимости [7].

Нулевую гипотезу (H_0) для данного критерия сформулируем следующим образом: для генеральной совокупности математическое ожидание реальной доходности портфеля Марковица будет меньше или равно математическому ожиданию обычного портфеля. Следовательно, в альтернативной гипотезе (H_1) утверждается, что математическое ожидание реальной доходности портфеля Марковица будет больше математического ожидания обычного портфеля, т.е.:

$$H_0: \mu_{M,p} \leq \mu_{o,p}$$

$$H_1: \mu_{M,p} > \mu_{o,p}$$

Сопоставление дисперсий реальных доходностей обоих портфелей в генеральной совокупности возможно с помощью критерия Фишера [7]. При этом формулируются следующие нулевая и альтернативная гипотезы:

$$H_0: \sigma_{M,p}^2 \leq \sigma_{o,p}^2$$

$$H_1: \sigma_{M,p}^2 > \sigma_{o,p}^2,$$

где $\sigma_{M,p}^2$ – неизвестное значение дисперсии реальной доходности портфеля Марковица в генеральной совокупности;

$\sigma_{o,p}^2$ – неизвестное значение дисперсии реальной доходности обычного портфеля в генеральной совокупности.

Для подтверждения или опровержения гипотез H_0 критерия Стьюдента и критерия Фишера были рассчитаны значения t- и F-статистик, а также соответствующие им p-значения, которые сведены в табл. 2.

Таблица 2 – t и F-статистика эксперимента

	Критерий Стьюдента		Критерий Фишера	
	t-статистика	p-значение*	F-статистика	p-значение
Выборка 1	1,833	4,1% (8,25%)	1,756	11,4%
Выборка 2	0,007	49,7% (99,4%)	0,461	95,0%
Объединенная	1,013	15,9% (31,7%)	0,900	45,0%

* В столбце p-значений критерия Стьюдента в скобках приведены значения ошибок отклонения нулевой гипотезы двустороннего критерия о равенстве нулю разностей реальных доходностей сравниваемых портфелей.

Из табл. 2 видно, что при имеющемся значении t-статистики для выборки 1 вероятность того, что она принадлежит генеральной совокупности, у которой $\mu_{M,p} \leq \mu_{o,p}$, составляет всего лишь 4,1%, а вероятность того, что $\sigma_{M,p}^2 \leq \sigma_{o,p}^2$, составляет 11,4%. Иными словами вероятность того, что портфель Марковица будет эффективнее простого портфеля по первому условию эффективности равна 96%.

Если же проекцией поведения доходностей акций в генеральной совокупности будет выборка 2, то с вероятностью 95,0% риск портфеля Марковица будет меньше риска простого портфеля, а доходности с вероятностью 99,4% будут равны, т.е. портфель Марковица будет эффективным по второму условию эффективности для случая генеральной совокупности, частью которой является выборка 2.

Следует отметить, что для второй выборки среднее значение реальной доходности является отрицательным, несмотря на то, что в данной выборке постоянно присутствуют положительные значения доходностей различных активов из числа входящих в состав портфеля (рис. 2). Если трейдер на данном отрезке времени в качестве прогноза в своей торговле будет использовать результаты решения задачи Марковица (3) – (5), то он потерпит убытки и навряд ли назовет данный прогноз эффективным. Тем не менее, данный прогноз считается эффективным в первую очередь по критерию минимума риска. Именно минимизация риска лежит во главе угла всех моделей диверсификации портфелей. А для увеличения среднего значения доходности и перевода его в плоскость положительных чисел необходимо использование, неких других моделей прогнозирования (если таковые имеются).

Рассмотренные в работе выборка 1 и выборка 2 представляют собой два различных типа поведения доходностей активов на бирже и при этом являются элементами одной и той же генеральной совокупности. Поэтому естественным является вопрос об эффективности теории Марковица в случае, когда в выборке в равной степени присутствуют оба типа поведения курсов активов, т.е. для случая объединенной выборки. С этой целью объединим реальные доходности портфелей в две объединенные выборки общим объемом по сорок реальных значений доходностей, после чего вычтем разности между реальными доходностями портфеля Марковица и обычного портфеля.

В последних строках табл. 1 и табл. 2 приведены значения статистик, рассчитанных при объединении обеих выборок. Из приведенных численных значений рассчитанных статистик видно, что у объединенной выборки разность реальных значений доходностей остается положительной в пользу портфеля Марковица (t -статистика равна 1,013) при примерно одинаковом риске обеих портфелей (F -статистика равна 0,9). При этом вероятность большей эффективности портфеля Марковица уменьшилась до значения 84%.

Выводы

В работе показано, что применение двухвыборочных критериев Стьюдента и Фишера в процессе сравнительного анализа эффективности применения различных методик диверсификации портфеля инвестиций позволяет получить объективные оценки эффективности наполнения портфеля активами.

Проведенный в работе сравнительный анализ портфеля активов, доли которых определены из решения задачи Марковица, и портфеля с равными долями активов показал большую эффективность первого в условиях использования акций, торгуемых на Украинской фондовой бирже с темпом в один день.

Показано также, что портфель, собранный на основе решения задачи Марковица, обеспечивая минимум риска, далеко не всегда в современных условиях способен обеспечить положительные значения доходности портфеля. И этот факт в современных условиях поведения курсов акций на фондовых биржах, в том числе и на Украинской фондовой бирже, у трейдеров создает впечатление о неэффективности использования в качестве прогноза в своей торговле результаты решения задачи Марковица.

Перечень использованных источников

1. Markowitz H. Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets / H. Markowitz. – Oxford ; Cambridge : Blackwell, 1992. – 387 p.
2. Касимов Ю. Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг / Ю. Ф. Касимов. – Москва : Филинъ, 1998. – 144 с
3. Андрухович П. Ф. Долгосрочная и среднесрочная динамика индекса Доу-Джонса / П.Ф. Андрухович // Проблемы прогнозирования. – 2005. – № 2. – С. 24-62.
4. Первозванский А. А. Финансовый рынок: расчёт и риск / А. А. Первозванский, Т. Н. Первозванская. – Москва : ИНФРА-М, 1994. – 192 с.
5. Малыхин В. И. Финансовая математика : учеб. пособие для вузов / В. И. Малыхин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 237 с.
6. Українська фондова біржа [Електронний ресурс] : [сайт організації]. – Режим доступу: <http://ukrse.com.ua>. – Станом на 01.10.2014. – Назва з екрана.

7. Баутин Г. А. Динамическая оптимизация портфеля инвестиций на базе стохастической модели Российского фондового рынка / Г. А. Баутин, В. А. Калягин // Бизнес-информатика. – 2008. – № 1. – С. 29-35.

8. Статистика для менеджеров с использованием Microsoft® Excel / Д. Левин [и др.] ; пер. с англ. – 4-е изд. – Москва : Вильямс, 2004. – 1312 с.

© Ю. И. Евдокименко, Г. П. Ефименко,
И. В. Змиевская, Л. А. Обоянская

The efficiency criterion of Markowitz portfolio theory application in the short-term trading at the Ukrainian Stock Exchange example

Evdokimenko Yuri

*Kharkiv Institute of Trade and Economics of Kyiv National University of Trade and Economics,
Associate Professor of Department of Mathematics and Informatics,
PhD in Physical-mathematical Sciences, Senior Researcher, Ukraine*

Efimenko Galina

*Kharkiv Institute of Trade and Economics of Kyiv National University of Trade and Economics,
Senior Teacher of Department of Mathematics and Informatics, Ukraine*

Zmievskaya Irena

*Kharkiv Institute of Trade and Economics of Kyiv National University of Trade and Economics,
Senior Teacher of Department of Mathematics and Informatics, Ukraine*

Oboyanskaya Lubov

*Kharkiv Institute of Trade and Economics of Kyiv National University of Trade and Economics,
Senior Teacher of Department of Mathematics and Informatics, Ukraine*

Abstract. The article presents a comparative analysis of the profitability and risk of the two stock portfolios: a portfolio with equal shares of assets and portfolio of assets with shares determined on the basis of Markowitz portfolio theory. The purpose of the research is to identify the effectiveness of the Markowitz portfolio theory for prediction in terms of trade on the Ukrainian Stock Exchange.

According to the study results, the efficiency criteria were developed and evaluated. It is proved that the portfolio based on the Markowitz problem solutions presents smaller risk at equal profitability, and in some cases, greater profitability, which makes it more efficient in the process of diversification of the risk portfolio.

Keywords: criterion of efficiency, profitability, risk, portfolio, Markowitz portfolio theory.

© Y. Evdokimenko, G. Efimenko,
I. Zmievskaya, L. Oboyanskaya