

Вплив цифрових інновацій на ставлення майбутніх учителів математики до варіаційного числення

[The Impact of Digital Innovations on the Attitudes of Future Mathematics Teachers Toward Calculus of Variations]

Наталія Кугай¹, Микола Калініченко²

Nataliia Kuhai, Mykola Kalinichenko

¹ *Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University*

24 Kyiv street, Hlukhiv, Sumy, Ukraine, 41400

² *Institute of Radio Astronomy of National Academy of Sciences of Ukraine*

4 Mystetstv Street, Kharkiv, Ukraine, 61002

DOI: 10.22178/pos.121-7

LCC Subject Category: L7-991

Received 15.07.2025

Accepted 28.08.2025

Published online 31.08.2025

Corresponding Author:

Nataliia Kuhai

© 2025 The Authors. This article is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

License 

Анотація. У роботі розглянуто цифрові інновації, які доцільно запроваджувати під час вивчення варіаційного числення: програмні засоби візуалізації (загального й математичного призначення), відкриті освітні ресурси, штучний інтелект, системи управління навчанням. Серед програмних засобів візуалізації розглянуто *MindMeister*, *Genially*, *GeoGebra*, *MATLAB*, наведено приклади їхнього застосування для створення інтелект-карт й інтерактивних плакатів, побудови графіків екстремалей, розв'язування задач варіаційного числення. Для цих засобів з'ясовано їхнє значення, форми, методи й можливості застосування під час вивчення варіаційного числення. Наведено можливості відкритих освітніх ресурсів (онлайн-курсів та відеолекцій) і штучного інтелекту (*Gemini*) в індивідуалізації навчання, ознайомленні здобувачів освіти з зарубіжним досвідом навчання варіаційного числення й застосуванням цифрових освітніх ресурсів. Показано, що для організації дистанційного навчання та забезпечення для всіх учасників освітнього процесу рівного доступу до цифрових освітніх ресурсів доцільно використати платформу *Google Classroom*. Проведене анкетування студентів до та після систематичного застосування цифрових інновацій показало статистично значущу позитивну динаміку у ставленні до вивчення варіаційного числення (за критерієм Вілкоксона). Результати підтверджують можливість і доцільність комплексного впровадження цифрових інновацій у процес професійної підготовки майбутніх учителів математики.

Ключові слова: цифрові інновації; варіаційне числення; цифрові засоби візуалізації; майбутні вчителі математики; *GeoGebra*; *MATLAB*; штучний інтелект; *Gemini*; *Google Classroom*.

Abstract. The paper considers digital innovations that are useful to introduce when studying calculus of variations: visualisation software (general and mathematical), open educational resources, artificial intelligence, and learning management systems. Among the visualisation software tools, *MindMeister*, *Genially*, *GeoGebra*, and *MATLAB* are considered, and examples of their use for creating mind maps and interactive posters, constructing graphs of extrema, and solving problems of variational calculus are given. The significance, forms, methods, and possibilities of using these tools in the study of calculus of variations are clarified. The possibilities of open educational

resources (online courses and video lectures) and artificial intelligence (Gemini) in individualising learning, familiarising students with foreign experiences in teaching calculus of variations, and utilising digital educational resources are presented. It is advisable to use the Google Classroom platform to organise distance learning and ensure equal access to digital educational resources for all participants in the educational process. A survey of students before and after the systematic application of digital innovations showed a statistically significant positive trend in attitudes towards the study of calculus of variations (according to Wilcoxon's criterion). The results confirm the feasibility and expediency of introducing digital innovations comprehensively into the professional training process of future mathematics teachers.

Keywords: digital innovations; calculus of variations; digital visualisation tools; future mathematics teachers; GeoGebra; MATLAB; artificial intelligence; Gemini; Google Classroom.

ВСТУП

Сучасний етап розвитку суспільства характеризується тотальною цифровізацією всіх його сфер. Це стосується й освітньої галузі, яка покликана забезпечувати набуття здобувачами цифрових компетентностей, сприяти конкурентоспроможності випускників на ринку праці, зокрема світовому. Інтенсивний розвиток цифрових технологій спричинив радикальні трансформації в освітньому просторі. Сучасна педагогічна парадигма передбачає високий рівень цифрової компетентності, адаптивності та інноваційності у підходах до навчання з боку вчителів для ефективного задоволення освітніх потреб здобувачів 21-го століття.

У звіті Всесвітнього економічного форуму [1] представлено 10 ключових навичок, які будуть затребувані в найближчому майбутньому. Тут наголошується, що вакансії, які зростають найшвидше, пов'язані з технологіями й цифровізацією. Технологічна грамотність, зокрема штучний інтелект, стає щодалі важливішою, і ця тенденція буде зберігатися наступні п'ять років.

У Kartі навичок XXI століття [2] серед знань і навичок, якими мають володіти здобувачі освіти для успішної кар'єри, життя й громадянства, серед решти виокремлено й такі: інформаційні, медіа та технологічні навички (інформаційна й медіаграмотність, ІКТ (інформаційна, комунікаційна та технологічна) грамотність).

Сучасним учням, щоб досягати успіху, необхідно встигати за технологічним світом, розвивати навички майбутнього. І в цьому важлива

роль належить учителям, зокрема математики. Педагоги несуть відповідальність за організацію освітнього процесу, доцільне та грамотне використання цифрових засобів під час проведення уроків та оцінювання результатів діяльності учнів [3, 4]. Високий рівень набуті учителям цифрової компетентності сприяє швидкій адаптації до сучасного освітнього середовища та якісній підготовці учнів до життя в цифровому суспільстві [5].

Сьогодні цифрові інновації в освіті – це необхідність, оскільки вони створюють надзвичайні можливості для покращення викладання й навчання студентів, сприяють залученню здобувачів освіти та готовності останніх до технологічно керованого світу. Хоча значна частина педагогічної спільноти визнає потенціал цифрових інновацій у підвищенні залученості студентів, забезпеченні індивідуалізованого освітнього досвіду та розширенні доступу до глобальних ресурсів, процес їх успішної інтеграції в освітній процес часто стикається з численними перешкодами. Одними з ключових проблем є відсутність досвіду адаптації традиційних освітніх підходів до ефективного використання цифрових інновацій, рівень цифрової компетентності вчителів й ставлення вчителів до інновацій, зокрема й цифрових [6].

Як стверджують науковці, цифрові інновації охоплюють широкий спектр технологій і методів – від використання інтерактивних дошок й електронних підручників до онлайн-курсів, віртуальної реальності, машинного навчання та штучного інтелекту [7]. До переліку цифрових інновацій науковці відносять: web-орієнтовані системи комп'ютерної мате-

матики; мобільні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики; мобільні математичні середовища [8], штучний інтелект (ШІ), віртуальну та доповнену реальність, системи управління навчанням, відкриті освітні ресурси, цифрові освітні ресурси тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Різними аспектами питання розробки й впровадження в освітній процес займалися В. Биков, М. Жалдак, О. Кузьмінська, Н. Морзе, О. Овчарук, О. Семеніхіна, С. Семеріков, О. Співаковський, О. Спірін, Ю. Триус та інші.

У наукових доробках М. Жалдака розглянуто застосування інформаційних технологій під час вивчення теорії ймовірності та математичної статистики [9], математичного аналізу [10], елементів елементарної математики [11]. Аналізу використання цифрових технологій у викладанні математичних дисциплін, зокрема курсу *AP Calculus*, присвячена стаття [12], у якій автори стверджують, що застосування цифрових технологій сприяє глибшому розумінню студентами складних математичних концепцій. У роботі [13] автори розглядають цифрові освітні ресурси для вивчення інтегрального числення й лінійної алгебри і наголошують на необхідності надання здобувачам поінформованого вибору тих чи інших ресурсів, певних рекомендацій щодо їхнього доцільного використання.

Цифрові освітні ресурси як засіб вивчення математики у вищій школі є темою багатьох досліджень, зокрема: у статті [14] автори аналізують застосування цифрових ресурсів (серед них – *MATLAB*) під час написання кваліфікаційних проєктів; автор дослідження [15] наголошує, що ефективність використання ресурсів у процесі навчання математики залежить від їхньої інтеграції в освітній процес, а не лише від їхньої наявності; автори роботи [16] досліджують залежність між вибором студентом певного освітнього ресурсу і цілями цього студента.

Проблеми підготовки майбутніх учителів, зокрема й учителів математики в контексті впровадження цифрових технологій обговорюються в дослідженнях [17–19] та інших. Особливості застосування сучасних цифрових ресурсів (мобільних пристроїв, онлайн-калькуляторів, вебплатформ тощо), технологій віртуальної й доповненої реальності у практичній підготовці майбутніх учителів

математики розглянуто у дослідженні [18]. Автори статті [19] визначили й обґрунтували педагогічні умови підготовки майбутніх учителів математики до використання засобів віртуальної наочності, одна з цих умов – активне використання засобів комп'ютерної візуалізації у процесі вивчення професійно орієнтованих дисциплін. У роботі [17] досліджено, зокрема, обізнаність викладачів закладів вищої освіти, студентів педагогічних спеціальностей закладів вищої освіти, а також учителів закладів загальної середньої освіти в цифрових інструментах та їх бажанні підвищити свою кваліфікацію задля розвитку їх цифрової компетентності у сучасному цифровому суспільстві.

Теоретико-методологічні основи використання технологій візуалізації під час підготовки майбутніх учителів математики визначено й обґрунтовано у [20], застосування засобів візуалізації під час вивчення математичних дисциплін продемонстровано й аргументовано в наукових працях [21, 22] та багатьох інших.

Питання впровадження систем комп'ютерної математики під час вивчення варіаційного числення (як змістового модуля дисципліни «Основи теорії і методів оптимізації») розглядаються у статті [23]. Підкреслено, що під час розв'язування прикладних задач треба передбачити знаходження розв'язків за допомогою різних програмних середовищ і засобів, використання сучасних інформаційних технологій навчання. У роботі [24] автор для унаочнення задач варіаційного числення та їхніх розв'язків розглядає *MATLAB*, автори статей [25, 26] аналізують можливості Maple для розв'язування варіаційних задач, зокрема використання пакета *VariationalCalculus* для символічного обчислення екстремалей і побудови їхніх графіків [26].

Дослідження, присвячені вивченню можливостей впровадження цифрових інновацій саме під час навчання варіаційного числення, недостатньо відображені в науковій літературі. Тому це питання потребує детальнішого розгляду в контексті підготовки здобувачів освіти до майбутньої професійної діяльності з урахуванням того, що цифрові технології постійно розвиваються і відповідно змінюються можливості їхнього застосування в освіті.

Мета дослідження. Показати шляхи інтеграції цифрових інновацій у процес вивчення варіаційного числення та дослідити зміну ставлення здобувачів освіти до вивчення основ варіаційного числення.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення поставленої мети використано такі методи дослідження: аналіз, синтез, систематизація й узагальнення для опрацювання джерел з досліджуваної проблеми й виокремлення питань, які потребують подальшого вивчення; спостереження за здобувачами освіти й бесіди з ними у процесі вивчення варіаційного числення, анкетування студентів до та після вивчення варіаційного числення із систематичним, послідовним, цілеспрямованим використанням цифрових інновацій з метою визначення динаміки ставлення здобувачів освіти до варіаційного числення; непараметричний критерій перевірки статистичних гіпотез – критерій Вілкоксона.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Упровадження цифрових технологій в освітній процес підготовки майбутніх учителів математики має сприяти навчанню здобувачів освіти адаптувати ці цифрові технології для вирішення професійних завдань, для пошуку шляхів професійного становлення й подальшої праці в умовах цифрової освіти [27]. Керуючись цією ідеєю, проаналізувавши критерії й їхні показники, які визначені в роботах [28, 29], під час відбору цифрових інструментів і технологій для вивчення варіаційного числення ми враховували такі фактори:

- 1) дидактична доцільність і відповідність змісту варіаційного числення (сприяння кращому засвоєнню достатньо складних математичних концепцій і великих обсягів інформації шляхом візуалізації й структурування, наявність можливостей для розв'язування задач варіаційного числення);
- 2) практична значущість для майбутньої професійної діяльності вчителів математики (можливість ефективного застосування як під час навчання шкільного курсу математики, так і під час виконання різноманітних професійних завдань);

3) зручність використання й доступність (інтуїтивна зрозумілість і зручність у використанні, наявність у здобувачів певних навичок роботи з обраними інструментами);

4) інтерактивність і підтримка колективної роботи (можливість активної взаємодії між викладачем і здобувачами освіти, між здобувачами освіти, сприяння розвитку комунікативної компетентності);

5) поширеність й адаптивність (вільне поширення, оновлення, можливість адаптації до різних рівнів підготовки здобувачів освіти, підтримка інклюзивного й дистанційного навчання);

6) безпека й етичність (відповідність принципам академічної доброчесності, захист даних користувачів);

7) гнучкість і сумісність (можливість використання на різних пристроях й інтеграції з іншими освітніми платформами);

8) мотиваційний ефект і вплив на ставлення до варіаційного числення (можливість стимулювати інтерес до варіаційного числення, зменшувати тривожність і невпевненість здобувачів освіти, сприяти формуванню позитивного ставлення до навчання).

Цифрові засоби візуалізації

Усі математичні поняття – абстрактні й ідеальні. Не є винятком і поняття варіаційного числення. Тому роль засобів візуалізації для з'ясування сутності цих понять, розкриття змісту основних тверджень основ варіаційного числення, зв'язків між ними є надзвичайно важливою. Як правило, науковці розглядають такий розподіл засобів візуалізації (рисунок 1):

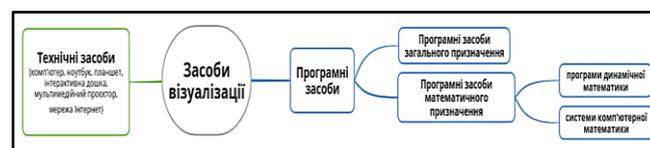


Рисунок 1 – Засоби візуалізації, схема побудована авторами за [20–22]

Вирішення проблеми забезпечення здобувачів освіти технічними засобами візуалізації в умовах дистанційного навчання практично не залежить ні від викладачів, ні від закладів вищої освіти. Але зауважимо, що без вирі-

шення цього питання застосувати програмні засоби візуалізації неможливо.

Розглянемо питання про використання програмних засобів візуалізації під час вивчення варіаційного числення. Будемо виходити з того, що мова йде про підготовку майбутніх учителів математики, а тому акцентуємо увагу на тих програмних засобах візуалізації, формах і методах їх використання, які здобувачі освіти зможуть застосувати у своїй майбутній професійній діяльності.

Програмні засоби візуалізації загального призначення. Вибір певного засобу візуалізації залежить від сукупності факторів, а саме: умов поширення (вільно чи за кошти), простоти і зручності їх використання, комфортності роботи на екранах різних розмірів [22], змісту матеріалу, який вивчається, сформульованої мети тих, хто навчається, і тих, хто викладає. Одним із засобів, які доцільно застосовувати під час вивчення основ варіаційного числення, є інтелект-карти. Серед багатьох сервісів, де такі карти можна створювати [22], доцільно рекомендувати здобувачам сервіс *MindMeister*. Безкоштовно тут можна створити три карти, але для реалізації завдань, які були сформульовані здобувачам освіти, цього було достатньо. Крім того, що за допомогою інтелект-карти можна структурувати достатньо складні концепції і великі обсяги інформації і відповідно їх візуалізувати [22], ці карти варто використовувати як засіб протидії порушенням принципів академічної доброчесності. Доцільно замінити написання рефератів або підготовку презентацій (під час вивчення основ варіаційного числення передбачено такі форми самостійної роботи здобувачів), які замість здобувачів може виконати ШІ, на складання відповідних інтелект-карт. На рисунках 2 і 3 наведено приклади інтелект-карт, складених після проведення всіх лекційних і практичних занять із варіаційного числення. Основна мета складання таких інтелектуальних карт – усвідомлення здобувачами зв'язків між окремими галузями математики, зокрема варіаційного числення з раніше опанованими математичними дисциплінами. Такі схеми можуть бути складені з різним ступенем глибини: вказати лише навчальні дисципліни, на яких базується вивчення варіаційного числення (рисунок 2); поглибити ці зв'язки, вказавши відповідні розділи цих дисциплін (рисунок 3); ще глибше – вказати теми.

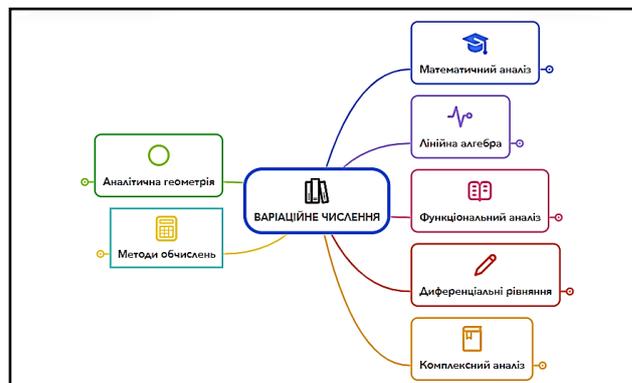


Рисунок 2 – Інтелект-карта «Теоретичні основи вивчення варіаційного числення»

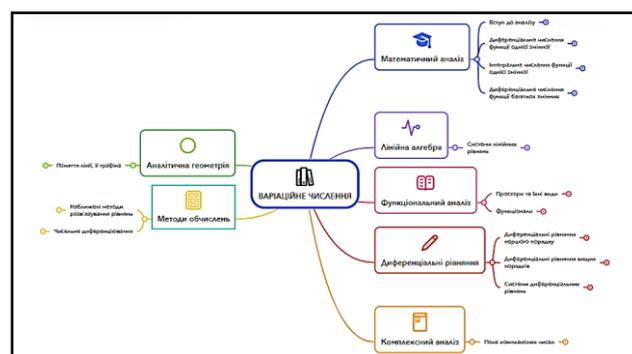


Рисунок 3 – Розширена інтелект-карта «Теоретичні основи вивчення варіаційного числення»

Форми роботи над складанням інтелект-карт також можуть бути різними: індивідуальна (кожен студент складає самостійно), групова (студентський колектив об'єднано в 3 групи, 1-а група розкриває зв'язки з математичним аналізом і лінійною алгеброю, 2-а – диференціальними рівняннями й комплексним аналізом, 3-я – аналітичною геометрією, методами обчислень, лінійною алгеброю). Застосування групової форми сприяє, крім іншого, розвитку комунікаційної компетентності, що є важливим для майбутніх учителів математики, особливо під час дистанційного навчання, і зменшує значення одного із недоліків цифрової освіти [30].

Оскільки в програмному засобі *MindMeister* можна працювати колективно онлайн, то можна запропонувати ще одне застосування інтелект-карт – складання плану розв'язування певної задачі варіаційного числення (рисунок 4). Таку роботу можна організувати на початку практичного заняття (форма організації – фронтально-колективна).



Рисунок 4 – Інтелект-карта «Схема розв'язування елементарної задачі варіаційного числення»

Ще одне застосування інтелект-карт – демонстрація розділів і основних тем математичної дисципліни [22]. Такого виду карти створюють підґрунтя для самостійного вивчення дисципліни і, за словами психологів, зменшують рівень тривожності здобувачів освіти, оскільки карти передбачають певний план діяльності, певну визначеність. На рисунку 5 наведено інтелект-карту тем варіаційного числення, яку доцільно пропонувати майбутнім учителям математики. Зауважимо, що в програмному засобі MindMeister передбачено демонстрацію інтелектуальних карт у вигляді презентації, що забезпечує ефективність їхнього застосування під час лекційних занять.

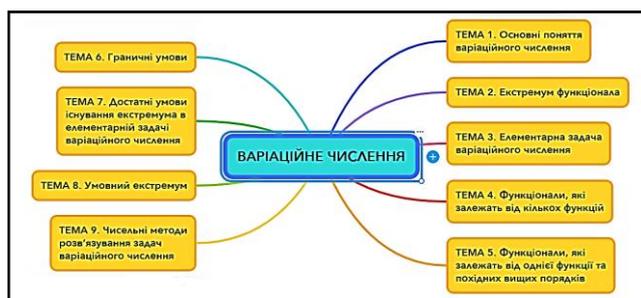


Рисунок 5 – Інтелект-карта тем варіаційного числення

Важливим і корисним для майбутніх учителів математики засобом вивчення варіаційного числення є інтерактивний плакат. Він відповідає практично всім вказаним вище факторам добору цифрових інструментів для вивчення варіаційного числення. Інтерактивний плакат можна використовувати як для вивчення нового, так і закріплення вже опанованого матеріалу [22], під час лекцій і для

самостійної роботи здобувачів. За допомогою інтерактивного плаката можна унаочнити та структурувати ключові ідеї та основні положення варіаційного числення, проілюструвати міжпредметні зв'язки з іншими математичними галузями, практичне застосування варіаційного числення у різних сферах, історію його розвитку. Створення й використання інтерактивних плакатів стимулює активну взаємодію здобувачів освіти з навчальним матеріалом, сприяє розвитку не тільки фахових, а й загальних компетентностей (володіння комунікативними навичками, здатність працювати в команді, використовувати інформаційні та комунікаційні технології, здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел тощо), удосконалює цифрові навички і розширює досвід роботи студентів з сучасними цифровими ресурсами, що є важливим для їхньої майбутньої професійної діяльності.

На рисунку 6 наведено приклад інтерактивного плаката, створеного здобувачами освіти в сервісі *Genially* у процесі самостійної роботи над темою «Основні етапи розвитку варіаційного числення».

Мета такої самостійної роботи:

1) ознайомитися з основними етапами розвитку варіаційного числення; показати, що причиною виникнення й розвитку абстрактних й ідеальних понять варіаційного числення були практичні (матеріальні) потреби;

2) удосконалити вміння майбутніх учителів математики створювати й застосовувати інтерактивні плакати.

Інтерактивність плаката, зображеного на рис. 6, досягається за рахунок додавання до нього позначок з покликаннями на сайт Вікіпедії, тексти і презентації:

1 – покликання на біографію Йоганна Бернуллі у Вікіпедії;

2 – задача про брахістохрону;

3 – задача про геодезичні лінії;

4 – задача Дідони;

5 – коротка інформація про створення варіаційного числення і назви шкіл та прізвища математиків, які займалися створенням основ варіаційного числення;

6 – покликання на біографію Леонарда Ейлера у Вікіпедії;

7 – покликання на біографію Огюстена-Луї Коші у Вікіпедії;

8 – покликання на біографію Михайла Остроградського у Вікіпедії;

9 – коротка інформація про повне розв'язання основних задач варіаційного числення з перерахуванням прізвищ математиків, які працювали над вказаними задачами.



Рисунок 6 – Інтерактивний плакат «Основні етапи розвитку варіаційного числення»

Програмні засоби візуалізації математичного призначення. Як зазначалося вище (рисунок 1), вказані засоби візуалізації доцільно об'єднати у дві групи: програми динамічної математики (*GeoGebra*, *DG*, *GRAN*, *Desmos* тощо) та системи комп'ютерної математики (*MATLAB*, *MathCad*, *Maple*, *Mathematica*, *Maxima* тощо) [21, 22]. Враховуючи змістове наповнення варіаційного числення, характеристики програмних засобів та їхні можливості, цілі підготовки майбутніх учителів математики, доцільно під час вивчення варіаційного числення використовувати *GeoGebra* та *MATLAB* (звісно, здобувачі освіти могли застосовувати інші засоби візуалізації математичного призначення за бажанням). Вибір *GeoGebra* та *MATLAB* ґрунтувався ще й на тому, що студенти вже мають навички роботи з цими засобами, і під час розв'язування варіаційних за-

дач головна увага буде зосереджена саме на завданнях з варіаційного числення, а досвід застосування програм динамічної й комп'ютерної математики до розв'язування математичних задач буде розширюватися.

Характеристики й можливості *GeoGebra*, способи застосування цієї програми динамічної математики досліджувалися багатьма вітчизняними й закордонними науковцями. Під час вивчення варіаційного числення розширюється досвід роботи здобувачів з цією програмою за рахунок побудови графіків функцій (екстремалей) на вказаному відрізку. Це можна робити за допомогою *GeoGebra* Графічний калькулятор, використовуючи опцію Якщо (умова, то). Покажемо на конкретному прикладі (практичне заняття).

Приклад 1. Знайдіть екстремалі функціонала

$$I[y] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2ye^x) dx, \text{ які задовольняють}$$

граничні умови $y(0) = 0$, $y(2) = e^{-2}$. Побудуйте ці екстремалі.

Склавши рівняння Ейлера і розв'язавши його, маємо результат: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$. Ура-

хувавши граничні умови, знаходимо довільні сталі $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Робимо висновок, що екстремаль існує і вона єдина:

$$y = -e^x + e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x, \quad x \in [0; 2].$$

Для унаочнення отриманого розв'язку побудуємо екстремаль за допомогою *GeoGebra* Графічний калькулятор (рисунок 7), використавши опцію Якщо

$$(0 \leq x \leq 2, \text{ то } y = -e^x + e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x).$$

Приклад 2. Лабораторна робота «Розв'язування елементарної задачі варіаційного числення методом скінченних різниць (МСР)». Завдання: Знайдіть допустиму екстремаль функціонала

$$I[y] = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + y'^2) dx, \text{ яка задовольняє гра-}$$

ничні умови $y(-1) = 1$, $y(1) = 2$: а) аналітичним методом; б) методом скінченних різниць ($n=4$). Порівняйте точний і наближений розв'язки.

На рисунку 8 показано точний розв'язок й криву Ейлера, побудовані за допомогою *GeoGebra* Графічний калькулятор.

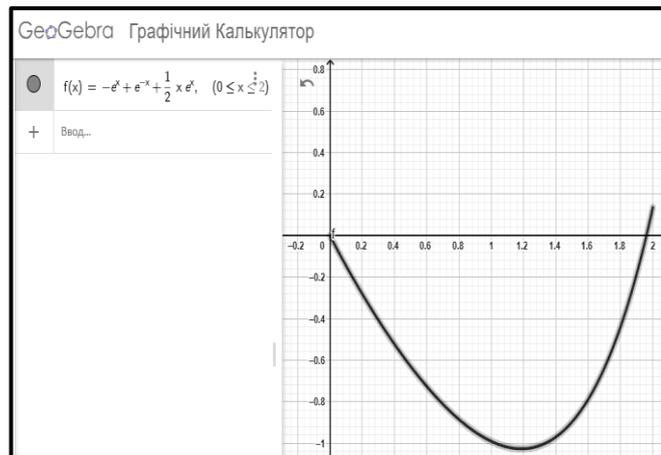


Рисунок 7 – Екстремаль $y = -e^x + e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$, $x \in [0; 2]$

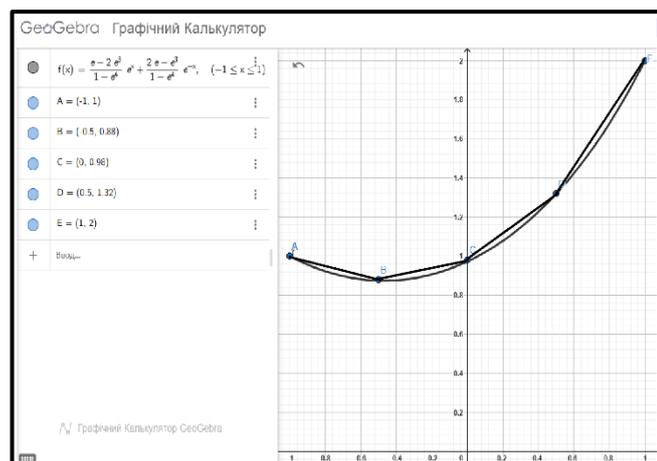


Рисунок 8 – Графік точного розв'язку й крива Ейлера

Приклад 3. Лабораторна робота «Розв'язування елементарної задачі варіаційного числення методом Рітца». Завдання: Знайдіть допустимі екстремалі функціонала

$$I[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx \quad \text{за умов}$$

$y(0)=1, y(1)=e-1$: а) аналітичним методом (точний розв'язок); б) методом Рітца (наближений розв'язок). Порівняйте точний і наближений розв'язки (візуально).

На рисунку 9 показано точний і наближений розв'язки (побудовані за допомогою *GeoGebra* Графічний калькулятор).

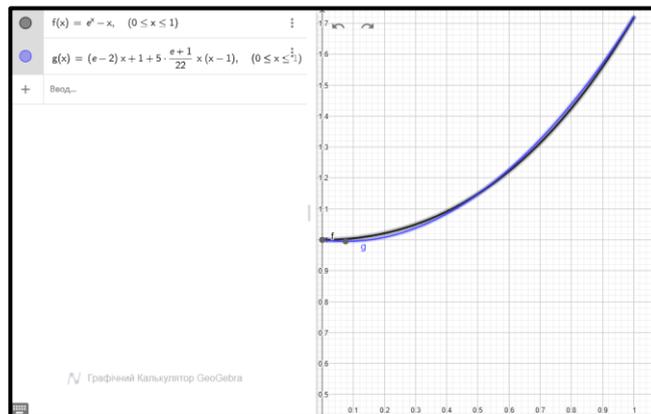


Рисунок 9 – Графік точного $y^* = e^x - x$ й наближеного $y_1(x) = (e-2)x + 1 + \frac{5(e+1)}{22} x(x-1)$ розв'язання елементарної задачі варіаційного числення

Такий досвід роботи (побудова графіка функції, яка на різних інтервалах задана різними аналітичними виразами) стане в нагоді майбутнім учителям математики для унаочнення за допомогою *GeoGebra* Графічний калькулятор таких абстрактних понять, як неперервність функції в точці, точка розриву, границя функції в точці, похідна функції в точці тощо.

Навчальною програмою передбачено й проведення лабораторних робіт у системах комп'ютерної математики. Однією з таких систем може бути *MATLAB*. Для розвитку критичного мислення, вміння порівнювати, встановлювати міжпредметні зв'язки доцільно запропонувати здобувачам освіти розв'язати задачу варіаційного числення аналітичним методом (знайти точний розв'язок) і за допомогою *MATLAB*.

Приклад 4. Лабораторна робота «Розв'язування елементарної задачі варіаційного числення в *MATLAB*». Завдання: Розв'яжіть елементарну задачу варіаційного

числення $I[y] = \int_{-1}^1 (y'^2 + y^2 + x^2) dx \rightarrow \text{extr}$ за умов $y(-1)=1, y(1)=2$: а) аналітично; б) за допомогою *MATLAB*. Порівняйте одержані розв'язки.

На рисунку 10 зображено допустиму екстремаль (*GeoGebra* Графічний калькулятор). У роботі далі показано, що на цій екстремалі

функціонал набуває мінімуму: $I_{\min}[y^*] = \frac{(5e^4 - 8e^2 + 5)}{e^4 - 1} + \frac{2}{3}$.

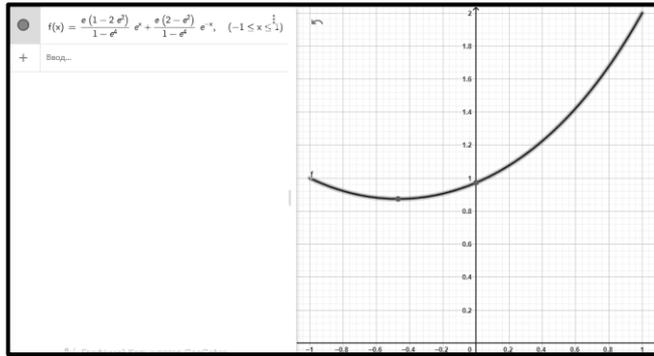


Рисунок 10 – Графік екстремалі

Для розв’язання цієї самої задачі в *MATLAB* було реалізовано програмний код:

```

script
clear all
% Знайти екстремаль функціонала
сума x y Dy Dy2
Fm=2*y-2*Dy^2;% підлінійна функція
x1=-1;%граничні умови
y1=1;%граничні умови
x2=1;%граничні умови
y2=2;%граничні умови
% частинні похідні
dFdy=diff(F,y);
dFdy1=diff(F,Dy);
fprintf('Fy=%s\n',char(dFdy))
fprintf('Fy''=%s\n',char(dFdy1))
% частинні похідні
% Умова Лагранжа
d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x);
d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y);
d_dFdy1_dyl=diff(dFdy1,Dy);
dFdydx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dyl*Dy2;
fprintf('Fy''/dx=%s\n',char(dFdydx))
fprintf('Fy''*y''=%s\n',char(d_dFdy1_dyl))
%Fy''/dx=Dy
% Умова Лагранжа
% Рівняння Ейлера
Euler=symple(dFdy-dFdydx);
deqEuler=[char(Euler) '0'];
fprintf('Рівняння Ейлера:\n%s\n',deqEuler)
% Рівняння Ейлера
% Розв'язок рівняння Ейлера
Sol=solve(deqEuler,'x');
if length(Sol)==1
    error('Немає розв'язків');
else
    disp('розв'язок рівняння Ейлера');
    fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol))
end
% Розв'язок рівняння Ейлера
% Рівняння для граничних умов
SolLeft=subs(Sol,x,x1);
SolRight=subs(Sol,x,x2);
EqLeft=[char(SolLeft) '=' char(sym(y1))];
EqRight=[char(SolRight) '=' char(sym(y2))];
disp('Рівняння для граничних умов')
fprintf('%s\n',EqLeft,EqRight)
% Рівняння для граничних умов
% Рівняння екстремалі
Con=solve(EqLeft,EqRight,'C3,C2')
C3=Con.C3;
C2=Con.C2;
Sol21=sym(eval(Sol),14);
disp('Рівняння екстремалі')
fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol21))
% Рівняння екстремалі
% Значення функціонала
Fextr=subs(F,{y,Dy},{Sol21,diff(Sol21,x)});
Jextr=eval(int(Fextr,x,x1,x2))
% Значення функціонала
% Графік екстремалі
xpl=linspace(x1,x2);
y21=subs(Sol21,x,xpl);
figure
plot(xpl,y21,'-r')
xlabel('x')
ylabel('y')
% Графік екстремалі
    
```

Результат реалізації зображено на рисунках 11-12.

```

Рівняння Ейлера:
2*y - 2*D2y=0
розв'язок рівняння Ейлера
y(x)=C3*exp(x) + C2*exp(-x)
Рівняння для граничних умов
C2*exp(1) + C3*exp(-1)=1
C2*exp(-1) + C3*exp(1)=2

Con =

    C2: [1x1 sym]
    C3: [1x1 sym]

Рівняння екстремалі
y(x)=0.69877023730774*exp(x) + 0.27331117318808*exp(-1.0*x)

Jextr =

    4.7504
    
```

Рисунок 11 – Рівняння екстремалі і мінімум функціонала

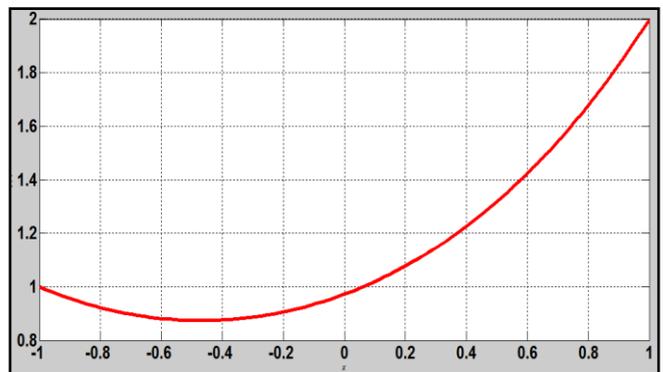


Рисунок 12 – Графік екстремалі

Для порівняння екстремалей, одержаних у пунктах а) й б), здобувачам пропонувалося: порівняти графіки екстремалей візуально (рисунки 10, 12); обчислити наближено коефіцієнти екстремалі

$$y^* = \frac{e(1-2e^2)}{1-e^4}e^x + \frac{e(2-e^2)}{1-e^4}e^{-x} \quad \text{і значення}$$

$$I_{\min}[y^*] = \frac{(5e^4 - 8e^2 + 5)}{e^4 - 1} + \frac{2}{3}$$

(можна скористатися калькулятором [31]):

$$\frac{e(1-2e^2)}{1-e^4} \approx 0.6987702373077446,$$

$$\frac{e(2-e^2)}{1-e^4} \approx 0.2733111731880837,$$

$$\frac{(5e^4 - 8e^2 + 5)}{e^4 - 1} + \frac{2}{3} \approx 4.7503580112172745 \approx 4.7504$$

Порівнюючи з даними на рисунку 11, здобувачі роблять висновок, що в обох випадках отримали однакові результати. Детально про організацію лабораторних і практичних занять можна прочитати зокрема в [32].

Відкриті цифрові освітні ресурси

Автори статті [33], провівши ґрунтовний аналіз відкритих освітніх ресурсів, указують, що найменше курсів створено з галузі «Математика» – усього 3,1% від усіх курсів. Серед відкритих онлайн-курсів нам удалося знайти Вступ до варіаційного числення наведений на сайті Відкритого університету (*The Open University*) [34].

Є чимало відеолекцій англійською мовою з варіаційного числення на *YouTube*, зокрема від *Fakulty of Khan* [35], від *No Chalk Academy* [36].

Ці ресурси є корисними для майбутніх учителів математики ще й з таких причин:

- 1) ознайомлення з основними поняттями й положеннями варіаційного числення англійською мовою сприяє розвитку їхньої комунікативної компетентності;
- 2) порівняння змісту навчальної дисципліни (або розділу навчальної дисципліни) «Варіаційне числення» у закладах вищої освіти України й закордоння;
- 3) ознайомлення з зарубіжним досвідом застосування цифрових освітніх ресурсів у закладах вищої освіти.

Штучний інтелект

Штучний інтелект стрімко ввірвався практично в усі сфери життя людей. Не є винятком й освіта. Про це свідчать численні курси підвищення кваліфікації освітян, які пропонуються різними організаціями (громадянська організація «Прогресивні», ТОВ «Академія цифрового розвитку», онлайн-курси від *Google* тощо), публікації вітчизняних і зарубіжних науковців, у яких розглядаються можливості, переваги й виклики застосування ШІ в освіті. Найбільше обговорюваним як у науковій літературі, так і в публічному дискурсі є *ChatGPT*, створений *OpenAI*. Але існують й інші, наприклад *Gemini*.

Для успішного вивчення основ варіаційного числення необхідний опанований раніше достатньо широкий масив знань і вмінь з різних розділів математики (рисунок 3). Здобувачі мають різний рівень засвоєння цих знань і вмінь. Для розроблення індивідуальної траєкторії вивчення основ варіаційного числення з урахуванням рівня опанованих знань і сформованих умінь можна застосувати різні

шляхи. Один із них – застосування одного із чат-ботів зі штучним інтелектом як персонального помічника в повторенні (або опануванні) необхідних знань і вмінь. Наприклад, необхідною умовою існування екстремуму функціонала є рівність нулю його першої варіації. Для елементарної задачі варіаційного числення

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, y(a) = y_a, y(b) = y_b \quad (1)$$

ця умова може бути записана у вигляді рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad (2)$$

яке, в загальному випадку, є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. Здобувачам освіти для оновлення й актуалізації знань про види диференціальних рівнянь другого порядку, способи їх розв'язування було запропоновано застосувати чат-бот *Gemini*, який здатен не тільки дібрати відповідну теорію, а й запропонувати та пояснити розв'язання таких рівнянь різного рівня складності. Звичайно, здобувачам освіти повідомлялися найпоширеніші диференціальні рівняння, які будуть виникати в контексті вивчення основ варіаційного числення ($y'' = f(x)$, $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ тощо), і основні вимоги до формулювання ефективного запиту (опис: ролі, яку виконує *Gemini*, завдання, формату відповіді, контексту або обмежень; якщо можливо – навести приклад). Так само була організована робота і для актуалізації знань і вмінь знаходити частинні похідні, розв'язувати системи лінійних рівнянь.

На початку вивчення основ варіаційного числення здобувачам освіти було повідомлено, у яких випадках вони можуть використовувати інструменти ШІ (про це було прописано і в силабусі [12]), і в процесі вивчення не раз наголошувалося, що ШІ – це інструмент для навчання, а не заміна навчання.

Доцільно зауважити, що *Gemini* здатен працювати як і перекладач, і це було використано для ознайомлення студентів із відповідними матеріалами англійською мовою [37].

Системи управління навчанням

З метою надання рівного доступу всім учасникам освітнього процесу до матеріалів курсу основ варіаційного числення, до можливості досягнути очікуваних результатів навчання, до оцінювання цих результатів, до зворотного зв'язку під час дистанційного навчання (для тих, хто доєднується до заняття через відеоконференцію і тих, хто не може цього зробити через брак електроенергії і/або інтернету і переглядатиме матеріали в зручний для нього час тоді, коли зможе) створено *Google Classroom*. Цю платформу обрано для дистанційного навчання майбутніх учителів математики, оскільки практично всі заклади загальної середньої освіти працюють (якщо дистанційно) саме на цій платформі і в здобувачів освіти є можливість удосконалити навички роботи на платформі *Google Classroom*. *Classroom* для вивчення варіаційного числення наповнений всіма необхідними матеріалами, серед яких доцільно виокремити: силабус, у якому вказано, під час вивчення яких питань доцільно застосовувати інформаційні технології і які саме; навчальний посібник [38], навчально-методичний посібник [32], які адаптовані саме для підготовки майбутніх учителів математики. Тут наведено теоретичний матеріал, плани практичних і лабораторних занять, у яких, зокрема, і проілюстровано застосування засобів візуалізації.

Під час вивчення основ варіаційного числення було досліджено ставлення здобувачів вищої освіти до вивчення цього модуля. Відбувалося це шляхом проведення спостережень, бесід і анкетування. На початку вивчення студенти висловлювали думку про складність (інколи і неможливість) вивчення теоретичного матеріалу варіаційного числення, оскільки для опанування цього матеріалу необхідна ґрунтовна математична база та висока внутрішня мотивація. Систематичне, послідовне, цілеспрямоване використання цифрових технологій, інтеграція освітніх ресурсів для вивчення варіаційного числення, залучення здобувачів до регулярної самостійної роботи із застосуванням цифрових технологій змінили думку студентів на краще. Наприкінці вивчення здобувачі відзначили: зменшення рівня тривожності й підвищення впевненості у своїх силах під час розв'язування задач варіаційного числення (причина такого підвищення – можливість отримати допомогу від ШІ або з його допомо-

гою перевірити правильність розв'язання); збагачення досвіду застосування цифрових технологій під час вивчення математики, а відтак і посилення цифрових навичок; усвідомлення можливості адаптації одержаних знань і вмінь до розв'язання майбутніх професійних задач. Більшість студентів вказала, що застосовуватимуть (або вже почали застосовувати) розглянуті тут цифрові технології у своїй практиці.

З метою визначення ставлення здобувачів освіти до вивчення основ варіаційного числення проведено анкетування на початку і наприкінці вивчення цього модуля. Анкета містила 10 тверджень, які характеризують ставлення до предмета. Навпроти кожного твердження студент мав поставити один із балів: 2 – це про нього, 1 – не впевнений, 0 – це не про нього. Тип ставлення до предмета визначався сумою виставлених балів, а саме: загальний бал у межах від 0 до 5 – «Д» (дуже негативне ставлення), від 6 до 9 – «Н» (негативне ставлення), від 10 або 12 – «Б» (байдуже ставлення), 13 – 17 балів позитивне ставлення («П»), у межах 18 – 20 балів, то «А» – активний тип ставлення до предмету. Обсяг вибірки – 42 здобувачі освіти. Результати анкетування зображені на діаграмі (рисунок 13). Тут по горизонталі відзначено тип ставлення, по вертикалі – у відсотках кількість здобувачів, які вибрали певний тип ставлення.



Рисунок 13 – Ставлення здобувачів освіти до варіаційного числення

Для опрацювання результатів анкетування використано критерій для виявлення зсувів у значеннях рівня ознаки – критерій Вілкоксона (проведено виміри на одній і тій самій вибірці в різних умовах, обсяг вибірки менше 50, досліджувана ознака – ставлення до ви-

вчення основ варіаційного числення). Типовим виявився зсув у напрямі покращення ставлення здобувачів освіти до вивчення основ варіаційного числення. Було встановлено не тільки спрямованість змін, а й той факт, що зсув показників у типовому напрямі є інтенсивнішим, ніж в нетиповому ($T_{\text{емп}}=101 < T_{\text{кр}0.05}=227$).

Обмеження дослідження (методологічні). У дослідженні брали участь лише студенти українських педагогічних закладів вищої освіти ($n = 42$), що робить наші результати менш узагальненими. На нашу думку, аналогічні дослідження, проведені в інших країнах та за участю більшої кількості учасників, могли б дати нові або більш узагальнені результати.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження підтвердило можливість і доцільність інтеграції цифрових інновацій у процес підготовки майбутніх учителів математики під час вивчення варіаційного числення.

Результати бесід зі студентами й спостережень за ними підтвердили розвиток практичних навичок застосування цифрових засобів під час вивчення варіаційного числення й розширення досвіду їхнього використання у майбутній професійній діяльності, підвищення зацікавленості до предмета, покращення розуміння складних концепцій, розвиток навичок самостійного навчання, зменшення рівня тривожності під час опанування варіаційного числення. Опрацювання результатів анкетування студентів до та після застосу-

вання запропонованих цифрових технологій засвідчили позитивну динаміку в їхньому ставленні до вивчення варіаційного числення (за критерієм Вілкоксона), що пояснюється інтерактивним характером навчання й використанням цифрових інновацій.

Результати цього дослідження відкривають перспективи для подальших наукових пошуків у таких напрямках:

1) дослідження можливості застосування під час вивчення варіаційного числення віртуальної та доповненої реальності, онлайн-сервісів для спільної роботи учасників освітнього процесу;

2) глибше дослідження впливу ШІ на мотивацію студентів до вивчення абстрактних теорій, їхню самостійність, розвиток критичного мислення та інші когнітивні процеси;

3) створення детальних методичних рекомендацій для викладачів щодо впровадження цифрових інновацій під час вивчення варіаційного числення та інших математичних дисциплін;

4) дослідження впливу застосування цифрових інновацій на результати навчання здобувачів освіти, розроблення й обґрунтування методики використання цифрових інструментів для оцінювання рівня опанування студентами програмних результатів навчання, аналіз ефективності різних платформ для проведення тестування з варіаційного числення.

REFERENCES

1. World Economic Forum (2023). *Future of Jobs Report 2023: Up to a Quarter of Jobs Expected to Change in Next Five Years*. Retrieved from <https://www.weforum.org/press/2023/04/future-of-jobs-report-2023-up-to-a-quarter-of-jobs-expected-to-change-in-next-five-years/>
2. Partnership for 21st Century Skills. (2011, January). *21st Century Skills Map*. Retrieved from <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED543032.pdf>
3. Ovcharuk, O. (2023). Monitoring gotovnosti vchiteliv do vikoristannya cifrovih zasobiv pid chas vijni v Ukraini [Monitoring teachers' readiness to use digital tools during the war in Ukraine]. *Information Technologies and Learning Tools*, 98(6), 52–65. doi: [10.33407/itlt.v98i6.5478](https://doi.org/10.33407/itlt.v98i6.5478) (in Ukrainian).
4. Paleczek, L., Pölzl-Stefanec, E., & Otrek-Cass, K. (2022). Special Issue: Rethinking educational practices and responsibilities in the light of digitalisation. *International Journal of Educational Research*, 119, 102075. doi: [10.1016/j.ijer.2022.102075](https://doi.org/10.1016/j.ijer.2022.102075)

5. Skripka, G. (2024). *Shtuchnij intelekt v osviti: udoskonalennya program pidvishennya kvalifikaciyi pedagogiv* [Artificial intelligence in education: improving teacher training programmes]. *Information Technologies and Learning Tools*, 101(3), 227–238. doi: [10.33407/itlt.v10i3.5639](https://doi.org/10.33407/itlt.v10i3.5639) (in Ukrainian).
6. Ning, Y., & Danso, S. D. (2025, February). *Assessing Pedagogical Readiness for Digital Innovation: A Mixed-Methods Study*. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/389315068_Assessing_Pedagogical_Readiness_for_Digital_Innovation_A_Mixed-Methods_Study
7. Gajovich, Ye., & Rozlucka, G. (2024). *Cifrovi innovaciyi v osviti* [Digital innovation in education]. *Educational Horizons*, 58(1), 56–60. doi: [10.15330/obrii.58.1.56-60](https://doi.org/10.15330/obrii.58.1.56-60) (in Ukrainian).
8. Trius, Y. (2012). *Innovacijni informacijni tehnologiji u navchanni matematichnih disciplin* [Innovative information technologies in the teaching of mathematical disciplines]. Retrieved from <https://ena.lpnu.ua:8443/server/api/core/bitstreams/4b2cce3a-69ee-4fd5-a2df-6e83d0415c43/content> (in Ukrainian).
9. Zhaldak, M., Kuzmina, N., & Berlinska, S. (1995). *Teoriya jmovirnostej i matematichna statistika z elementami informacijnoyi tehnologiyi* [Probability theory and mathematical statistics with elements of information technology]. Kyiv: Higher School (in Ukrainian).
10. Zhaldak, M., Mihalyn, G., & Dekanov, S. (2012). *Matematichnij analiz z elementami informacijnih tehnologij: navchalnij posibnik* [Mathematical Analysis with Elements of Information Technology: A Textbook]. Kyiv: Editorial offices of newspapers covering natural sciences and mathematics (in Ukrainian).
11. Zhaldak, M., Groholska, A., & Zhilcov, O. (2004). *Matematyka (trigonometriya, geometriya, elementi stohastiki) z komp'yuternoyu pidtrimkoyu* [Mathematics (trigonometry, geometry, elements of stochastics) with computer support]. Kyiv: MAUP (in Ukrainian).
12. Riegel, C., & Branker, M. M. (2018). Reaching Deep Conceptual Understanding through Technology. *Mathematics Teacher Learning and Teaching PK-12*, 112(4), 307–311. doi: [10.5951/mathteacher.112.4.0307](https://doi.org/10.5951/mathteacher.112.4.0307)
13. Kock, Z-J., & Pepin, B. (2018). *Student Use of Resources in Calculus and Linear Algebra*. Kristiansand: NDRUM Network.
14. Pepin, B., & Kock, Z. (2021). Students' use of resources in a Challenge-Based Learning context involving Mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7(2), 306–327. doi: [10.1007/s40753-021-00136-x](https://doi.org/10.1007/s40753-021-00136-x)
15. Adler, J. (2000). Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 205–224. doi: [10.1023/a:1009903206236](https://doi.org/10.1023/a:1009903206236)
16. Anastasakis, M., Robinson, C. L., & Lerman, S. (2017). Links between students' goals and their choice of educational resources in undergraduate mathematics†. *Teaching Mathematics and Its Applications, an International Journal of the IMA*, 36(2), 67–80. doi: [10.1093/teamat/hrx003](https://doi.org/10.1093/teamat/hrx003)
17. Morze, N., Vember, V., & Gladun, M. (2019). *3D картування цифрової компетентності в системі освіти України* [3D mapping of digital competence in the Ukrainian education system]. *Information Technologies and Learning Tools*, 70(2), 28. doi: [10.33407/itlt.v70i2.2994](https://doi.org/10.33407/itlt.v70i2.2994) (in Ukrainian).
18. Konoshevskij, O. (2024). *Pidgotovka majbutnih uchiteliv matematiki do zastosuvannya cifrovih tehnologij v osvitnomu procesi zakladiv zagalnoyi serednoyi osviti* [Preparing future mathematics teachers to use digital technologies in the educational process of general secondary education institutions]. *Mathematics, Computer Science, Physics: Science and Education*, 1(2), 200–209. doi: [10.31652/3041-1955/2024-01-02-10](https://doi.org/10.31652/3041-1955/2024-01-02-10) (in Ukrainian).

19. Mulesa, P., & Semenihina, O. (2023). *Pedagogichni umovi pidgotovki majbutnih uchiteliv matematiki ta informatiki do vikoristannya zasobiv virtualnoyi naochnosti u profesijnij diyalnosti* [Pedagogical conditions for training future teachers of mathematics and computer science to use virtual visual aids in their professional activities]. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 37–42. doi: [10.31110/2413-1571-2023-038-2-006](https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-006) (in Ukrainian).
20. Semenihina, O. (2017). *Teoriya i praktika formuvannya profesijnoyi gotovnosti majbutnih uchiteliv matematiki do vikoristannya zasobiv komp'yuternoyi vizualizaciyi matematichnih znan* [Theory and practice of preparing future mathematics teachers to use computer visualisation tools for teaching mathematics]; (Thesis, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko) (in Ukrainian).
21. Semenihina, O., & Biloshapka, N. (2018). *Pro vikoristannya vchitelyami matematiki zasobiv komp'yuternoyi vizualizaciyi* [On the use of computer visualisation tools by mathematics teachers]. *Humanisation of the Educational Process*. doi: [10.31865/2077-1827.1\(87\)2018.140455](https://doi.org/10.31865/2077-1827.1(87)2018.140455) (in Ukrainian).
22. Koval, T., & Besklinska, O. (2020). *Vikoristannya zasobiv vizualizaciyi dlya stvorennya elektronnih osvitnih resursiv u procesi navchannya matematichnih disciplin u zakladah vishoyi osviti* [The use of visualisation tools to create electronic educational resources in the teaching of mathematical disciplines in higher education institutions]. *Information Technologies and Learning Tools*, 77(3), 145–161. doi: [10.33407/itlt.v77i3.3411](https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3411) (in Ukrainian).
23. Kuzmina, N. (2012). *Zmist i metodika navchannya kursu «Osnovi teorii i metodiv optimizaciyi» v pedagogichnomu universiteti* [Content and teaching methods of the course 'Fundamentals of Optimisation Theory and Methods' at a pedagogical university]. *Scientific journal of the National Pedagogical University named after M.P. Dragomanov. Series No. 2: Computer-oriented learning systems*, 13 (20), 85-89 (in Ukrainian).
24. Calder, J. (2024, June 6). *The Calculus of Variations*. Retrieved from <https://www-users.cse.umn.edu/~jwcalder/CalculusOfVariations.pdf>
25. Boone, K. (2021, April 13). *Gâteaux differentials and Euler-Lagrange equations using Maple*. Retrieved from <https://kevinboone.me/gateaux.html>
26. Louro, A. M. F., & Torres, D. F. M. (2008). Maple symbolic computation in the calculus of variations. *arXiv (Cornell University)*. doi: [10.48550/arxiv.0806.0864](https://doi.org/10.48550/arxiv.0806.0864)
27. Moskalenko, O. (2022). Implementation of modern digital educational technologies in the training of mathematics teachers. *Pedagogical Sciences*, 80, 70–75. doi: [10.33989/2524-2474.2022.80.278220](https://doi.org/10.33989/2524-2474.2022.80.278220)
28. Spirin, O., & Vakaliuk, T. (2017). *Kriteriyi doboru vidkritih web-opiyentovanih tehnologij navchannya osnov programuvannya majbutnih uchiteliv informatiki* [Criteria for selecting open web-oriented technologies for teaching programming fundamentals to future computer science teachers]. *Information Technologies and Learning Tools*, 60(4), 275. doi: [10.33407/itlt.v60i4.1815](https://doi.org/10.33407/itlt.v60i4.1815) (in Ukrainian).
29. Vakalyuk, T. (2017). *Kriteriyi doboru hmaro oriyentovanoyi sistemi pidtrimki navchannya yak skladovoyi hmaro oriyentovanogo navchalnogo seredovisha dlya pidgotovki bakalavriv informatiki* [Criteria for selecting a cloud-oriented learning support system as part of a cloud-oriented learning environment for training bachelor's degree students in computer science]. *Zhytomyr Ivan Franko State University Journal, Pedagogical Sciences*, 4(90), 27–32. doi: [10.35433/pedagogy.4\(90\).2017.27-32](https://doi.org/10.35433/pedagogy.4(90).2017.27-32) (in Ukrainian).
30. Arkorful, V., & Abaidoo, N. (2014). *The role of e-learning: the advantages and disadvantages of its adoption in higher education*. *International Journal of Education and Research*, 2(12).
31. Mathematica. (n. d.). *Matematychnyi kalkuliator* [Mathematical calculator]. Retrieved from <https://xn--80aaasqmc6cd.xn--j1amh/mod/page/view.php?id=1135> (in Ukrainian).

32. Kugaj, N., & Kalinichenko, M. (2023). *Osnovi variacijnogo chislennya (praktikum)* [Fundamentals of Variational Calculus (Practical Course)]. Kharkiv: Digital Printing House LLC (in Ukrainian).
33. Semenihina, O., Yurchenko, A., Sbruyeva, A., Kuzminskij, A., Kuchaj, O., & Bida, O. A. (2020). Vidkriti cifrovi osvitni resursi u galuzi IT: kilkisnij analiz [Open digital educational resources in the field of IT: quantitative analysis]. *Information Technologies and Learning Tools*, 75(1), 331–348. doi: [10.33407/itlt.v75i1.3114](https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.3114) (in Ukrainian).
34. The Open University. (2016). *Introduction to the calculus of variations*. Retrieved from <https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/introduction-the-calculus-variations/content-section-1>
35. Faculty of Khan. (2017, July 10). Introduction to Calculus of Variations. Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=6HeQc7CSkZs&list=PLdgVBOaXkb9CD8igcUr9Fmn5WXLpE8ZE_&index=2
36. Maths for all. (2014, April 20). Calculus of variations. Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=U1QT4GWDig4&list=PLUnrYe_C6P_oWd9vCHteGNC6kwdKJgXra&index=2
37. Olver, P. (2021). The Calculus of Variations. Retrieved from https://www-users.cse.umn.edu/~olver/ln_/cv.pdf
38. Kugaj, N., & Kalinichenko, M. (2022). *Osnovi variacijnogo chislennya (kurs lekcij)* [Fundamentals of Variational Calculus (lecture course)]. Kharkiv: Digital Printing House LLC (in Ukrainian).