Формування вмінь майбутніх учителів математики застосовувати метод невизначених коефіцієнтів: методологічний аспект

Formation of Future Mathematics Teachers' Abilities to Apply the Method of Uncertain Coefficients: Methodological Aspect

Наталія Кугай [1]
Nataliia Kuhai

[1] *Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University*
24 Kyiv street, Hlukhiv, Sumy, Ukraine, 4140

DOI: 10.22178/pos.103-16

LCC Subject Category: PE1001-1693

Received 21.03.2024
Accepted 25.04.2024
Published online 30.04.2024

Corresponding Author:
nkuhai@gmail.com

Анотація. У статті розглянуто метод невизначених коефіцієнтів як елемент методологічних знань конкретно наукового рівня майбутніх учителів математики. Зауважено, що формування вміння застосовувати цей метод відбувається поетапно: пропедевтичний, навчально-діяльнісний, оцінювально-рефлексивний. Розкрито зміст діяльності на кожному з цих етапів, вказано, під час вивчення яких математичних дисциплін кожен етап реалізується. Наведено приклади завдань і запропоновано методику їх розв’язування.

Ключові слова: метод невизначених коефіцієнтів; майбутній вчитель математики; математичний аналіз; методологічні знання; методологічні вміння.

Abstract. The article considers the method of uncertain coefficients as an element of methodological knowledge of the specific scientific level of future mathematics teachers. It is noted that the formation of the ability to apply this method takes place in stages: propedeutic, educational and activity, evaluation, and reflection. The content of activities at each stage is revealed; it is indicated in the study of which mathematical disciplines each stage implements. Examples of tasks are given, and a methodology for solving them is proposed.

Keywords: method of uncertain coefficients; future mathematics teacher; mathematical analysis; methodological knowledge; methodological skills.

ВСТУП

Методологічна підготовка майбутніх учителів математики є однієї із важливих складових професійної підготовки і має своєю метою формування методологічної культури майбутнього фахівця. Це передбачає систематичне, послідовне й неперервне ознайомлення здобувачів освіти з методологічними знаннями й вміннями вже з першого курсу їхнього навчання у закладах вищої освіти.

Як відомо, методологічні знання поділяють на чотири рівні, а відповідно до змісту цих знань виокремлюють методологічні вміння майбутніх учителів математики [5]. Серед таких знань і вмінь чільне місце займають знання про методи, які застосовуються під час вивчення різних математичних дисциплін і вміння застосовувати ці методи, часто комбіновано, як в стандартних, так і в нестандартних ситуаціях. Встановлено, що процес формування методологічних знань і вмінь має наскрізний характер, проходить у три етапи (пропедевтичний, навчально-діяльнісний, оцінювально-рефлексивний) та триває протягом усього навчання майбутніх учителів математики [6].

Проблемам підготовки майбутніх учителів математики, зокрема й з акцентом на їхній методологічній підготовці, присвячені роботи І. Акуленко, Г. Бевза, В. Бевз, Н. Кугай, В. Кушніра, Г. Михаліна, Н. Тарасенкової, М. Шкіля та інших.

Мета статті – розглянути методику формування знань і вмінь майбутніх учителів математики про метод невизначених коефіцієнтів як про один із елементів методологічних знань конкретно наукового рівня.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичною основою застосування методу невизначених коефіцієнтів (МНК) є поняття рівності двох многочленів, які розглядаються як функції [2, с. 159]: два дійсні многочлени

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$
$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

збігаються як функції тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні коефіцієнти рівні, тобто

$$f(x)\equiv g(x)\Leftrightarrow a_i=b_i\ \forall i\in N\cup\{0\} \quad (1)$$

З цього тлумачення доцільно зробити висновок, що два дійсні многочлени

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$
$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

збігаються як функції, якщо вони набувають рівних значень для будь-якого значення аргумента, тобто

$$f(x)\equiv g(x)\Leftrightarrow \forall x_0\in R\ f(x_0)=g(x_0) \quad (2)$$

Зауважимо, що початкові знання про МНК студенти могли отримати у шкільному курсі математики (див., наприклад, [3]). А перше застосування МНК під час навчання в педагогічному ЗВО відбувається у процесі вивчення математичного аналізу, а саме під час інтегрування дробово-раціональних функцій. За браком часу доволі часто повідомлення про цей метод відбувається практично разом з повідомленнями про розклад раціонального дробу на суму елементарних дробів. Така одночасна подача достатньо великого масиву нових знань для здобувачів освіти призводить до того, що більшість з них пов'язують застосування МНК тільки з інтегруванням дробово-раціональних функцій і формують асоціацію «МНК – має бути дріб».

Ми пропонуємо повідомити сутність МНК (якщо є можливість, то з допомогою студентів, які ознайомлені з цим методом) на лекції перед розкриттям питання про схему розкладу правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів. Зробити це можна так:

1. Повідомити, що є такий метод – метод невизначених коефіцієнтів, який часто застосовується в різних галузях математики, а відтак і у відповідних навчальних дисциплінах. Вказати теоретичну основу цього методу (формула (1)).

2. Розв'язати кілька прикладів на застосування МНК усно.

Приклад 1. Для яких значень параметрів виконується рівність двох многочленів (x – змінна):

а) $f(x)=3x^2-4x+7$ і $g(x)=ax^2+bx+c$;

б) $h(x)=-4x$ і $\varphi(x)=bx+c$;

в) $f(x)=-x^2+9$ $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Відповідь:

а) $a=3, b=-4, c=7$;

б) $b=-4, c=0$;

в) $a=0, b=-1, c=0, d=9$.)

Розв'язати приклад, у якому для знаходження невідомих коефіцієнтів треба скласти і розв'язати систему. Доцільно змінити формулювання завдання (це сприяє вмінню за різними формами бачити однаковий зміст).

Приклад 2. Знайдіть невідомі коефіцієнти, якщо $5x+3\equiv A(x-3)+B(x+2)$.

Відповідь: $A=1.4, B=3.6$.

Повідомити, що МНК буде застосований під час вивчення навчальних дисциплін «Комплексний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Елементарна математика», «Алгебра і теорія чисел» тощо. Звичайно, більшість здобувачів освіти з часом це забудуть, але на даному етапі таке повідомлення сприятиме: а) підвищенню мотивації до опанування цим методом; б) формуванню вмінь встановлювати міжпредметні зв'язки.

Це сутність *пропедевтичного етапу* формування знань і вмінь майбутніх учителів математики про МНК як елемент методологічних знань. Цей етап приходиться на вивчення математичного аналізу.

Навчально-діяльнісний етап реалізується також під час вивчення математичного аналізу. Формування вміння застосовувати МНК відбувається на практичних заняттях, під час виконання домашніх та індивідуальних завдань (поза аудиторна робота). На початку відповідного практичного заняття доцільно у формі бесіди актуалізувати знання здобувачів освіти про МНК (можна запропонувати завдання як у прикладах 1 і 2 (аналогічні)). Далі після правильних відповідей студентів варто розглянути приклад:

Приклад 3. Знайдіть невідомі коефіцієнти, якщо

$$x \equiv A(x+2)(x+3)+$$
$$+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)$$

Як правило, студенти починають розв'язувати цей приклад за аналогією з попередніми. Доцільно їх зупинити і повідомити (або у формі бесіди з'ясувати), що є інше потрактовування рівності двох многочленів (формула (2)). Далі з'ясувати, які ж точки зручно брати за x_0. Здобувачі здогадуються, що це мають бути – 2; – 3; – 4, і легко знаходять невизначені коефіцієнти.

Відповідь: $A=-\dfrac{1}{2}, B=2, C=-\dfrac{3}{2}$.

Доцільно звернути увагу на комбінованому застосуванні обох трактувань рівності двох многочленів, особливо у випадку наявності кратних коренів або незвідних над полем дійсних чисел квадратних множників.

На цьому етапі вміння застосовувати МНК формуються разом з уміннями інтегрувати раціональні функції. Ускладнюються вирази, якими задаються раціональні функції. Доцільно акцентувати увагу студентів на встановленні міжпредметних зв'язків («Математичний аналіз», «Алгебра і теорія чисел», шкільний курс математики (ШКМ)).

Реалізація *оцінювально-рефлексивного етапу* приходиться на вивчення навчальних дисциплін «Комплексний аналіз». «Диференціальні рівняння», «Елементарна математика». На цьому етапі здобувачі освіти самостійно (або за мінімальної підказки викладача) переносять засвоєні знання і сформовані вміння в нові умови:

1. Комплексний аналіз: розклад дробово-раціональної функції комплексної змінної в ряд Лорана [4].

2. Диференціальні рівняння: знаходження частинного розв'язку ДР (і систем ДР) із сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального виду [7].

3. Елементарна математика: розклад многочлена над полем дійсних чисел на множники.

Проведене нами дослідження підтвердило доцільність пропонованого нами підходу до формування знань про МНК і вмінь його застосовувати. Так, під час вивчення диференціальних рівнянь, зокрема неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, у яких права частина має вигляд $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, після повідомлення викладача, що частинний розв'язок треба шукати у вигляді $y_{чн}(x)=x^m Q_n(x)e^{ax}$ (m – кратність числа a як кореня характеристичного рівняння, $m \in N \cup \{0\}$), більшість здобувачів освіти відповіли, що для знаходження невідомих коефіцієнтів треба застосувати МНК.

Не таким очевидним для здобувачів освіти було застосування МНК для розкладу многочлена на множники (навчальна дисципліна «Елементарна математика»). Ми пояснюємо це тим, що, як правило, здобувачі користувалися для розв'язання цієї задачі або способами ШКМ (винесення за дужки, формули скороченого множення, групування, розклад квадратного тричлена тощо), або теоремою Безу та схемою Горнера. Вважаємо, що обов'язково треба ознайомити здобувачів освіти ще і з таким застосуванням МНК. Розглянемо приклад.

Приклад 4. Розкладіть многочлен $x^4+2x^3-16x^2-22x+7$ на множники над полем дійсних чисел або Знайдіть дійсні корені рівняння $x^4+2x^3-16x^2-22x+7=0$.

Як правило, здобувачі навіть не пробують застосувати способи розкладу на множники зі ШКМ, а починають шукати дільники вільного члена і перевіряти, чи не є вони коренями многочлена. Результат, звичайно, негативний: числа 1, 7, – 1, – 7 не є коренями заданого многочлена. Далі доцільно провести бесіду: Корені якого многочлена ви точно можете знайти? (Квадратного тричлена). А чи можна записати заданий многочлен як добуток квадратних тричленів? (Можемо, але невідомі коефіцієнти). А яким методом можна ці коефіцієнти знайти? (МНК!). Після висновку, що квадратні тричлени мають бути зведеними, здобувачі освіти роблять запис:

$$x^4+2x^3-16x^2-22x+7=$$
$$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

Після розкриття дужок, зведення подібних доданків і застосування формули (1) маємо систему:

$$\begin{cases} a+c=2, \\ d+ac+b=-16, \\ ad+bc=-22, \\ bd=7. \end{cases} \tag{3}$$

Звертаємо увагу здобувачів освіти, що система не є лінійною на відміну від попередніх випадків застосування МНК. Тому виникає питання: чи має вона розв'язки? Якщо має, то чи цей розв'язок єдиний? (формування методологічних знань філософського рівня існування і єдиність). Пропонуємо цю проблему дослідити студентам самостійно. А для розв'язання системи (3) обмежимося множиною цілих чисел. Шляхом перебору можливих значень b і d для останнього рівняння цієї системи маємо, що $a=-4, b=1, c=6, d=7$.

Відповідний розклад має вигляд $x^4+2x^3-16x^2-22x+7=$ $=(x^2-4x+1)(x^2+6x+7)$.

З'ясувавши, що квадратні тричлени є звідними над полем дійсних чисел, маємо остаточний розклад:

$$\begin{aligned} &x^4+2x^3-16x^2-22x+7= \\ &=(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) \\ &(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2}) \end{aligned} \tag{4}$$

Доцільно сформулювати здобувачам освіти запитання:

1. Чи зміниться розклад на множники цього многочлена, якщо його розглядати над полем раціональних чисел?

Так, розклад матиме вигляд $x^4+2x^3-16x^2-22x+7=$ $(x^2-4x+1)(x^2+6x+7)$.

2. Над полем комплексних чисел? Ні.

3. Чи зможете ви застосувати МНК у ШКМ? Так, у 9-11 класах, під час підготовки учнів до математичних олімпіад і різних конкурсів.

Важливо організувати таке навчання, щоб здобувачі освіти намагалися сформулювати запитання і дати на них відповідь: «Що я знаю про МНК?», «Що я вмію?», «Навіщо мені потрібен МНК як майбутньому вчителеві математики?».

Доцільно також обговорити інші застосування МНК, наприклад, для розв'язання повної проблеми власних значень і власних векторів матриці [1].

ВИСНОВКИ

Отже, метод найменших квадратів застосовується у багатьох математичних дисциплінах. Поетапне формування знань про цей метод і вмінь його застосовувати сприяє розвитку вміння застосовувати МНК в різних ситуаціях.

REFERENCES

1. Andrunyk, V., Vysoczka, V. Pasichnyk, V., Chyrun, L., & Chyrun, L. (2017). *Chyselni metody v kompyuternyx naukax* [Numerical Methods in Computer Science]. Lviv: Novyj svit - 2020 (in Ukrainian).

2. Bezushhak, O., Ganyushkin, O., & Kochubinska, Ye. (2019). *Navchalnyj posibnyk z linijnoyi algebry dlya studentiv mexaniko-matematychnogo fakultetu* [Textbook on Linear Algebra for Students of the Faculty of Mechanics and Mathematics]. Kyiv: Kyivskyj universytet (in Ukrainian).

3. Izyumchenko, L., Nichyshy`na, V., & Rizhnyak, R. (2009). *Racionalni rivnyannya ta nerivnosti* [Rational Equations and Inequalities]. Kirovograd: RVV KDPU im. V.Vynnychenka (in Ukrainian).

4. Kuhai, N. (2016). Metodologichni znannya konkretno naukovogo rivnya z navchalnoyi dyscypliny "Kompleksnyj analiz" majbutnogo vchytelya matematyky [Methodological Knowledge of a Specific Scientific Level in the Educational Discipline 'Complex Analysis' for Future Mathematics Teachers]. *Pedagogichni nauky: teoriya, istoriya, innovacijni texnologiyi, 2*(56), 305–313 (in Ukrainian).

5. Kuhai, N. (2017). *Metodolohichni znannia maibutnoho vchytelia matematyky* [Methodological knowledge of the future teacher of mathematics]. Kharkiv: FOP Panov A. M. (in Ukrainian).

6. Kuhai, N., & Kalinichenko, M. (2020). *Pidgotovka majbutnix uchyteliv matematyky: metodologichny j aspekt* [Training of future teachers of mathematics: methodological aspect]. Kharkiv: FOP Panov A. M. (in Ukrainian).

7. Samojlenko, A., Perestyuk, M., & Parasyuk, I. (2003). *Dyferencialni rivnyannya* [Differential Equations]. Kyiv: Lybid` (in Ukrainian).